**Некомпенсаторное агрегирование и рейтингование студентов. II**

А. А. Гончаров, В. В. Чистяков

Государственный университет - Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде,

603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12, кафедра Прикладной математики и информатики

lexer.07@mail.ru (А. А. Гончаров), vchistyakov@hse.ru (В. В. Чистяков)

1. **Введение**

Составление рейтингов или рейтингование применяется в настоящее время повсеместно. Обычно индивидуальные мнения членов какого-либо коллектива или экспертов относительно альтернатив выражаются при помощи различных шкал оценок: например, «плохо, средне, хорошо» (при дегустации или опросе общественного мнения), «1, 2, 3, 4, 5» (в школе или университете) и т.п. Задача состоит в том, чтобы на основе полученных наборов из индивидуальных оценок определить какие же альтернативы являются более предпочтительными с точки зрения всего коллектива (в другой терминологии агрегировать общественное мнение коллектива или рейтинговать множество альтернатив по предпочтению).

По традиции в качестве меры сравнения зачастую используется сумма или среднее арифметическое полученных наборов оценок. Следует отметить, что в этом случае низкие оценки одних экспертов компенсируются высокими оценками других экспертов и становятся не (очень) заметными. Такая ситуация не вполне адекватна, например, тому, что наблюдается в высшем образовании. Предположим, что в результате сдачи сессии учащийся А получает по трем предметам оценки 5, 5 и 2, а учащийся В – оценки 3, 3 и 3. Сумма оценок для А равна 12, а для В сумма оценок есть 9. Очевидное преимущество А контрастирует с общепринятым правилом – вузы предпочитают учащегося В.

Целью настоящей работы является исследование и сравнение двух типов агрегирований индивидуальных предпочтений – с одной стороны, учитывающего компенсирования, как при суммировании, а с другой – без учета компенсаций, как в приведенном выше примере. В качестве иллюстрации некомпенсаторный метод применяется для рейтингования студентов факультета Бизнес-информатики и прикладной математики Нижегородского филиала ГУ-ВШЭ и сравнивается со стандартным рейтингованием, принятым в ГУ-ВШЭ. Если постулировать, что изучаемые студентами предметы «более или менее равноправны» (хотя бы с той точки зрения, что неудовлетворительная оценка по любому курсу приводит к отчислению), то новый рейтинг студентов несколько точнее отражает реальное положение: например, получающий стипендию студент всегда имеет выше рейтинг, чем неполучающий. Если же принять во внимание, что оценки проставляются «разумным образом» (т.е. за знания), то во многом результаты нового и стандартного рейтингований схожи (по крайней мере это касается последовательности расположения студентов в итоговом рейтинге).

1. **Используемые модели рейтингования**

*2.1. Стандартное рейтингование студентов ГУ-ВШЭ*

Стандартное рейтингование студентов, утвержденное в ГУ-ВШЭ, опирается на 60 кредитов, распределенных между всеми изучаемыми студентами предметами, и основывается на рабочем плане студенческой группы за календарный год. В этом рабочем плане выделяются два типа предметов – неаккредитованные и аккредитованные. Неаккредитованные предметы не учитываются при подсчете рейтинга студентов. Обычно такими предметами являются факультативы, иностранный язык и физическая культура. Аккредитованные предметы имеют в рейтинге определенные зачетные единицы, называемые кредитами, сумма которых равняется 60. Количество кредитов у каждого предмета зависит от доли его времени в общей нагрузке студентов за год (в среднем в 1,5 раза больше числа модулей, отведенных на предмет). Поскольку в ГУ-ВШЭ принята десятибалльная система оценок, то максимальное число кредитов, которые студент может получить за один год, равно 600. В случае неуспешной сдачи экзамена по какому-либо предмету независимо от оценки за пересдачу экзамена в рейтинг студента по этому предмету записывается оценка 0 (нуль).

Математически значение рейтинга ГУ-ВШЭ можно записать в виде:





где xi – оценка студента за экзамен по предмету i, wi – зачетные единицы предмета (кредиты, «веса») и n – количество предметов в годовой нагрузке. Отметим, что в силу сказанного выше, 0≤ Sn(х)≤ 600 и xi принимает значения 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (оценки 1, 2 и 3 не считаются “положительными” и играют такую же роль, как 0).

* 1. *Средний балл*

В большинстве вузов для рейтингования студентов используется обычный средний балл. В этом случае все зачетные единицы предметов wi одинаковы и равны 1/n (так что сумма «весов» равна 1).

Следует отметить, что рейтинг ГУ-ВШЭ имеет определенные преимущества по сравнению со средним баллом: он более адекватно учитывает успеваемость студентов по предметам своей специальности и учитывает нагрузку студента по каждому отдельному предмету в зависимости от количества часов, отведенных на предмет.

* 1. *Некомпенсаторный метод рейтингования*

Приступим к рассмотрению модели некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок, которая была разработана в [2, 3, 10] для m=3 оценок и в [5-9, 11, 12] для произвольного числа оценок m>3.

Для случая трех оценок («плохо», «средне», «хорошо») некомпенсаторная модель применялась при изучении развитости гражданского общества в некоторых регионах России [1]. Для случая многих оценок (m=10) начало применения некомпенсаторной модели для рейтингования студентов положено в [4].

На практике при оценке альтернатив из некоторого множества Х зачастую используется шкала M={1,2,…,m}, m≥2, где оценки из М могут означать: 1 – плохо, 2 – чуть лучше,…, (m-1) – отлично, m – превосходно. Предположим, что некая альтернатива х из Х в результате какой-либо процедуры оценивания характеризуется набором из n≥2 оценок x1,x2,…,xn, где каждое xj∊M, а j изменяется от 1 до n.

Напомним, что при неуспешной сдаче студентом экзамена по определенному предмету в рейтинг по этому предмету студенту записывается 0 баллов. Это означает, что низкие оценки «не должны» быть компенсированы высокими, и это обстоятельство следует учитывать при рейтинговании. В работах, упомянутых выше, предложен следующий метод сравнения альтернатив (в данном случае студентов) по их оценкам x=(x1,…,xn).

Для удобства переобозначим оценки в рейтинге. Это переобозначение не влияет на результаты и будут отражать суть рейтингования. Оценки 0, 1, 2, 3 обозначаются через 1, 4 – через 2, 5 – через 3, 6 – через 4, 7 – через 5, 8 – через 6, 9 – через 7 и 10 – через 8.

Обозначим через vj(x) количество оценок j в векторе оценок x, где j принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Скажем, что x=(x1,…,xn) строго предпочтительнее y=(y1,…,yn), если [v1(x)<v1(y)] или [v1(x)= v1(y) и v2(x)< v2(y)] или [v1(x)= v1(y) и v2(x)= v2(y) и v3(x)< v3(y)] или, и так далее, до [v1(x)= v1(y) и v2(x)= v2(y) и … и v6(x)= v6(y) и v7(x)< v7(y)]. Отметим, что v1(x)+ v2(x)+ v3(x)+…+ v7(x)+ v8(x)=n (размерность вектора x). Функция Nn(x), определенная на множестве всех возможных альтернатив Х=Mn, называется функцией предпочтения, если неравенство Nn(x)> Nn(y) выполнено тогда и только тогда, когда альтернатива x строго предпочтительнее альтернативы y в смысле, указанном выше. Последнее обстоятельство позволяет не рассматривать все вектора из Х, а ограничиться лишь «главными» векторами, координаты которых упорядочены по возрастанию:

X\* = {x=(x1, x2, … , xn) ∊ Mn : x1 ≤ x2 ≤ … ≤ xn}.

В качестве примера приведем ситуацию, когда студенты за сессию сдают 3 предмета и шкала оценок у них измеряется от 1 до m=5. Тогда положение векторов в рейтинге в зависимости от их оценок осуществляется в следующем порядке:

(1, 1, 1)1, (1, 1, 2) 2, (1, 1, 3) 3, (1, 1, 4) 4, (1, 1, 5) 5,

(1, 2, 2) 6, (1, 2, 3) 7, (1, 2, 4) 8, (1, 2, 5) 9,

(1, 3, 3) 10, (1, 3, 4) 11, (1, 3, 5) 12,

(1, 4, 4) 13, (1, 4, 5) 14, (1, 5, 5) 15,

(2, 2, 2) 16, (2, 2, 3) 17, (2, 2, 4) 18, (2, 2, 5) 19,

(2, 3, 3) 20, (2, 3, 4) 21, (2, 3, 5) 22,

(2, 4, 4) 23, (2, 4, 5) 24, (2, 5, 5) 25,

(3, 3, 3) 26, (3, 3, 4) 27, (3, 3, 5) 28,

(3, 4, 4) 29, (3, 4, 5) 30, (3, 5, 5) 31,

(4, 4, 4) 32, (4, 4, 5) 33, (4, 5, 5) 34, (5, 5, 5) 35.

Здесь нижний индекс справа у вектора указывает порядковый номер этого вектора в рейтинговании. Из таблицы видно, что определенное выше правило сравнения применительно к примеру , рассмотренному во введении (когда в результате сдачи сессии студент А получает по трем предметам оценки 5, 5 и 2, а студент В – оценки 3, 3 и 3), строго расставит студентов в том порядке, который предпочитают вузы.

В работах [5, 6, 9, 12] такую функцию предпочтения Nn(x) с дополнительным ограничением удалось найти в явном виде. А именно функция предпочтения Nn(x): Х --> {1,2,…,|X\*|}, где |X\*|=, выражается по формуле:



где  и .

Отметим, что множество { Nn(x) : x∊Х} значений Nn совпадает с отрезком натуральных чисел [1, |X\*|] = { k∊ℕ : 1 ≤ k ≤ |X\*|}.

Функция предпочтения с этим дополнительным свойством называется функцией перечисления [9]. Последняя является наиболее «экономной» из всех функций предпочтения для отношения строгого предпочтения, поскольку позволяет присваивать большие номера в естественном порядке более предпочтительным альтернативам. Кроме того, функция Nn(x) обладает некоторыми оптимальными свойствами (типа симметрии, Парето-доминирования и др., подробнее см. [2, 3, 5, 7, 10-12])

В рамках нашей модели рейтингования студентов n – число изучаемых предметов, m =8 –количество оценок (в нашем случае 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) и vj(x) – количество оценок j у студента x.

В ходе работы также удалось вывести другое представление функции Nn, более удобное для компьютерной реализации на языке программирования С++.

Для m=2 она имеет вид:

$N\_{n}\left(x\right)=v\_{2}\left(x\right)+1$,

при m=3 – вид ([7]):

$N\_{n}\left(x\right)=\frac{\left(v\_{2}\left(x\right)+v\_{3}\left(x\right)+1\right)(v\_{2}\left(x\right)+v\_{3}\left(x\right))}{2}+v\_{3}\left(x\right)+1$,

и в общем случае при m ≥ 2 ([5, 9, 12]) имеет вид:

$$N\_{n}\left(x\right)=\sum\_{i=1}^{m-1}\frac{1}{\left(m-i\right)!}\prod\_{k=0}^{m-i-1}\left(\sum\_{j=i+1}^{m}v\_{j}\left(x\right)+k\right)+1.$$

Некомпенсаторное агрегирование рассматривается в нашей модели в двух вариантах:

а) когда число n равно числу предметов (без учета факультативов) в базовой нагрузке;

б) когда n=60 (по числу кредитов). Этот случай обусловлен тем, что оценка по предмету повторяется столько раз, сколько кредитов на него отведено в учебном плане (это позволяет учитывать вес оценки).

Оба некомпенсаторных метода рейтингования студентов (некомпенсаторный метод рейтингования студентов – n и некомпенсаторный метод рейтингования студентов – 60) имеют устойчивое конкурентное преимущество перед другими методами – они имеют возможность отслеживать тех студентов, которые имеют пересдачи, должны получать стипендию, а также студентов – круглых отличников. Чтобы отследить эту возможность выделим несколько блоков, в которые могут входить студенты в рейтинге.

Для некомпенсаторного метода рейтингования студентов по n оценкам блоки будут выглядеть следующим образом.

Всюду ниже, если оценка j встречается в векторе k раз, то она будет обозначаться через jk.

1 блок: (1n),…,(11, 8n-1) - студенты, у которых есть пересдачи,

2 блок: (2n),…,(21, 8n-1) - студенты, у которых минимальная оценка 4,

3 блок: (3 n),…,(31,8 n-1) - студенты, у которых минимальная оценка 5,

4 блок: (4 n),…,(41,8 n-1) - студенты, у которых минимальная оценка 6,

5 блок: (5 n),…,(51,8 n-1) - студенты, у которых минимальная оценка 7,

6 блок: (6 n),…,(61,8 n-1) - студенты, у которых минимальная оценка 8,

7 блок: (7 n),…,(8 n) - студенты, у которых только 9 и 10.

Для некомпенсаторного метода рейтингования студентов по 60 кредитам блоки выглядят следующим образом:

1 блок: (160)1,…,(11,859)778789440 - студенты, у которых есть пересдачи, где нижний индекс 778789440=N60(11,859). При «нормировке на 600 единиц» промежуток [1, 778789440] принадлежит промежутку (0;537,31], поскольку N60(11,859)\*600/ N60(860) =537,31. Аналогичный смысл имеют подобные числа ниже.

2 блок: (260)778789441,…,(21,859)861388320 - студенты, у которых минимальная оценка 4, где 861388320=N60(21,859) и «при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (537,31;594,30].

3 блок: (360) 861388321,…,(31,859)869012832 - студенты, у которых минимальная оценка 5,

«при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (594,30;599,56].

4 блок: (460) 869012833,…,(41,859)869608497 - студенты, у которых минимальная оценка 6

«при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (599,56; 599,97].

5 блок: (560) 869608498,…,(51,859)869646317 - студенты, у которых минимальная оценка 7

«при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (599,97; 599,998].

6 блок: (660) 869646318,…,(61,859) 869648147 - студенты, у которых минимальная оценка 8

«при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (599,998; 599,999].

7 блок: (760) 869648148,…,(860)869648208 - студенты, у которых только 9 и 10

«при нормировке на 600 единиц» получаем промежуток (599,999;600].

Выделенные блоки имеют следующий смысл:

1 блок – студенты, которые имеют пересдачи,

2 и 3 блоки – студенты, которые имеют удовлетворительные оценки,

4 и 5 блоки - студенты, которые имеют только хорошие и отличные оценки (и должны получать стипендию),

6 и 7 блоки - студенты, которые имеют только отличные оценки (и должны получать повышенную стипендию).

1. **Примеры рейтингования студентов НФ ГУ ВШЭ**

Результаты стандартного рейтингования ГУ-ВШЭ, рейтингования по среднему баллу и некомпенсаторное рейтингование при n = число предметов и n=60 наглядно продемонстрированы на следующих графиках. Все рейтинговые оценки получены с помощью компьютерной программы, написанной на языке С++, а графики и другие проведенные расчеты были получены при помощи программы Microsoft Office Excel. Оценки взяты из реальных экзаменационных ведомостей студентов 1-го, 2-го и 3-го курсов факультета Бизнес-информатики и прикладной математики НФ ГУ-ВШЭ за 2008-2009 г.

Латинскими буквами по оси абсцисс обозначены студенты, принимавшие участие в рейтинговании, а по оси ординат приведен их количественный рейтинг.

1. ***Группа 06БИ***

Рис. 1. Значения различных видов рейтингования для студентов группы 06БИ

Здесь A (4 блок) - студент, который имеет только хорошие и отличные оценки и получает стипендию, а B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M (все 1 блок) - студенты, которые имеют пересдачи. Отметим, что рейтинг ВШЭ студента В - самый высокий в группе 06БИ и, тем не менее, он стипендии не получает.

1. ***Группа 06ПМИ***

Рис. 2. Значения различных видов рейтингования для студентов группы 06ПМИ

На рис.2 студент A (2 блок) имеет удовлетворительные оценки, а студенты B, C, D, E, F (все 1 блок) имеют пересдачи.

1. ***Группа 07ПМИ***

Рис. 3. Значения различных видов рейтингования для студентов группы 07ПМИ

Здесь A, B (4 блок) - студенты, которые имеют только хорошие и отличные оценки и получают стипендию, C, D, E, F, G (все 2 блок) - студенты, которые имеют удовлетворительные оценки и H, I, J, K, L, M, N (все 1 блок) - студенты, которые имеют пересдачи.

1. ***Группа 08ПМИ***

Рис. 4. Значения различных видов рейтингования для студентов группы 08ПМИ

На рис.4 студенты A (5 блок), B, D, C, E (все 4 блок) имеют только хорошие и отличные оценки и получают стипендию, студенты F (3 блок), H, I, G, K, J, L, M, N, O, Q, P (все 2 блок) имеют удовлетворительные оценки и студент R (1 блок) имеет пересдачи.

1. **Заключение**

Стандартный и некомпенсаторный подходы к рейтингованию студентов в подавляющем большинстве случаев дают одинаковое положение студентов в итоговом рейтинге (что может объясняться «разумностью» проставленных оценок за реально сданные предметы). Различие наблюдается, например, при анализе рейтинга для целей выдачи стипендии: в стандартном рейтинге студент (студент В на рис. 1) может иметь больший рейтинг (чем студент А на рис. 1) и при этом не получать стипендии, тогда как такое положение невозможно при некомпенсаторном подходе. Кроме того, при некомпенсаторном подходе возможно провести деление студентов на четкие группы: совсем плохие, середняки и отличники. Некомпенсаторный рейтинг с n=60 практически всегда ниже некомпенсаторного рейтинга при n<60, который в свою очередь ниже, чем средний балл и рейтинг ГУ-ВШЭ; последние два метода, как правило, дают сходные результаты. Таким образом, с точки зрения учета влияния низких оценок на результирующий рейтинг некомпенсаторный метод рейтингования более адекватен для практического применения.

**Список используемой литературы**

[1] Алескеров Ф.Т., Беляева Н.Ю. *«Количественный анализ развитости гражданского общества в регионах России: параметры, методика, пилотные исследования».* Полития, N 1 (2008), 160-168.

[2] Алескеров Ф.Т., Юзбашев Д.А., Якуба В.И. *«Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок».* Автоматика и телемеханика, N 1 (2007), 147-152.

[3] Алескеров Ф.Т., Якуба В.И. *«Метод порогового агрегирования трехградационных ранжировок».* Докл. РАН, 413, N 2 (2007), 181-183.

[4] Гончаров А.А., Чистяков В.В. *«Некомпенсаторное агрегирование и рейтингование студентов».* Российский экономический конгресс. Сборник докладов участников на CD (\files\kbn0.doc). М.:ИЭ РАН, декабрь 2009, 1-5. Доступно по ссылке: <http://www.econorus.org/consp/files/kbn0.doc>

[5] Калягин В.А., Чистяков В.В. *«Модель некомпенсаторного агрегирования с произвольным набором оценок».* Докл. РАН, 421, N 5 (2008), 607-610.

[6] Калягин В.А., Чистяков В.В. *«Об определении функции предпочтений в задаче рейтингования при отсутствии компенсаций».* В кн.: Модернизация экономики и глобализация (отв. ред. Е.Г. Ясин). Гос. ун-т -- Высшая школа экономики. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, книга 3, 2009, 592-597.

[7] Калягин В.А., Чистяков В.В. *«Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования».* Препринт WP7/2009/01. М: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. – 76 с.

[8] Калягин В.А., Чистяков В.В*. «Ранжирование альтернатив по многим критериям: аксиоматика и алгоритмы».* Российский экономический конгресс. Сборник докладов участников на CD (\files\vmtv.pdf): Программные секции/ Теория коллективного выбора/ Анализ влияния и агрегирование/ Доклад 2. М.:ИЭ РАН, декабрь 2009, 1-6. Доступно по ссылке: <http://www.econorus.org/consp/files/vmtv.pdf>

[9] Чистяков В.В. *«Функция перечисления в многокритериальной задаче порогового агрегирования».* Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее прилож. И смежные вопр. Материалы 9-ой междунар. Казанской летней научной школы-конф. Казань: Изд-во Казан. матем. об-во, Том 38, 2009, 302-304.

[10] Aleskerov F., Yakuba V., Yuzbashev D*. «A `threshold aggregation of three-graded rankings »*. Math. Social Sci. 53 (2007), 106-110.

[11] Aleskerov F., Chistyakov V.V., Kalyagin V*.A. «The threshold aggregation»*. Econ. lett. 107, N 2 (2010), 161-162.

[12] Aleskerov F., Chistyakov V.V., Kalyagin V*.A. «Multiple criteria threshold decision making algorithms »*. Препринт WP7/2010/02 – М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2010. – 40 с.